MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşiţa, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

100
2010
Anul Matematicii in
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A XI-A
PROFIL M1

1. a) Să se dea un exemplu de matrice $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A^2+I_2)=2$;

b) Să se arate că nu există matrice $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care

$$\det(A^2+I_2)=2\cdot\det(A+I_2).$$

RMT 1/2009

2. Fie $a_1=1$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $a_{n+1}=\dfrac{n}{1+a_n}$, $\forall n\ge 1.$ Arătați că:

a) $a_n\ge\sqrt{n}-1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n{}^2}{n}=1.$

RMT 1/2009

3. Se consideră $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $BC=I_2$ şi funcțiile $f,g:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care

$$(f\circ g)(X)=A\cdot g(X)+f(X)\cdot B,\ \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se arate că :

a) există $B,C\in M_2(\mathbb{R}), B\ne I_2, C\ne I_2$, pentru care $BC=I_2$;

b) dacă f este injectivă,atunci şi g este injectivă.

4. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-ax}{x^2+2x-3}=b$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.